

# Détection de changement de sous-espace signal de matrices de covariance structurées

R. BEN ABDALLAH, A. BRELOY, M. N. EL KORSO, D. LAUTRU

Laboratoire Energétique Mécanique Electromagnétisme (LEME), Université Paris Nanterre,  
50 rue de Sèvres 92410 Ville d'Avray, France

{rayen.benabdallah, abreloy, m.elkors, dlautru}@parisnanterre.fr

**Résumé** – Le test statistique de propriété communes entre les matrices de covariance tient une place très importante en traitement du signal. Dans cet article, nous proposons un nouveau test statistique dans le contexte de matrices de covariance structurées. Plus précisément, nous considérons un signal de rang faible corrompu par un bruit blanc gaussien additif. Notre objectif est de tester l'égalité du sous-espace signal, c'est à dire les composantes principales communes à un ensemble de matrices de covariance. Dans un premier temps, une statistique de décision est dérivée en utilisant le rapport de vraisemblance généralisée. Le maximum de vraisemblance n'ayant pas d'expression analytique dans ce cas, nous proposons un algorithme d'estimation itératif de type majoration-minimisation. Enfin, nous étudions les propriétés du détecteur proposé à l'aide de simulations numériques.

**Abstract** – Testing common properties between covariance matrices is a relevant problem in a plethora of signal processing applications. In this paper, we derive a new statistical test in the context of structured covariance matrices. Specifically, we consider low rank signal component plus white Gaussian noise structure. Our aim is to test the equality of the principal subspace, i.e., subspace spanned by the principal eigenvectors of a group of covariance matrices. A decision statistic is derived using the generalized likelihood ratio test. As the formulation of the proposed test implies a non-trivial optimization problem, we derive an appropriate majorization-minimization algorithm. Finally, numerical simulations illustrate the properties of the newly proposed detector compared to the state of the art.

## 1 Introduction

Tester des propriétés communes entre des matrices de covariance (MC) est un problème classique en traitement statistique du signal [6, 3, 7]. Il est, par exemple, motivé par des applications radar comme la détection de changement sur des images SAR (*synthetic aperture radar*) [2]. Dans ce contexte, l'introduction d'information sur la structure des MC s'avère utile pour l'étude de certains phénomènes physiques spécifiques [10, 1].

Nous considérons dans ce papier le traitement des MC modélisées par la somme d'une composante de rang faible (où se trouve l'information générée par des signaux d'intérêt) plus une matrice d'identité (représentant la contribution de bruit blanc additif). Cette structure particulière des MC a été exploitée dans le contexte de détection radar [4, 9]. Dans cet article, nous souhaitons développer un test de détection qui soit uniquement sensible à une variation du sous-espace signal. Ainsi, ce test d'hypothèse permet de détecter des anomalies dans le sous-espace signal due à la présence des données aberrantes (*outliers*). Nous proposons une statistique de décision en utilisant le test du rapport de vraisemblance généralisée (TRVG) pour le modèle de covariances structurées. Comme le problème d'optimisation introduit par ce TRVG n'a pas une solution analytique, nous dérivons un algorithme itératif de type majoration-minimisation (MM) [8] afin de pouvoir l'évaluer.

Enfin, des simulations numériques illustrent les performances et les propriétés de la méthode de détection proposée.

La notation suivante est adoptée :  $\mathcal{H}_M^+$  représente l'ensemble des matrices hermitiennes semi-définies positives de dimension  $M \times M$ ,  $\mathcal{U}_R^M = \{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M \times R} | \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_R\}$  est l'ensemble de matrices semi-unitaire de dimension  $M \times R$ ,  $\mathcal{G}_R$  est l'ensemble de projecteurs de rang  $R$ . L'opérateur  $\mathcal{R}_R\{\cdot\}$ , défini formellement en (6), extrait le sous-espace engendré par les  $R$  vecteurs propres dominants d'une matrice donnée, l'opérateur  $\stackrel{\text{DVS}}{=}$  définit la décomposition en valeurs singulières d'une matrice donnée et  $\text{exptr}\{\cdot\}$  est un opérateur qui désigne exponentiel trace d'une matrice donnée.

## 2 Modèle des observations

Nous considérons le jeu de données total partitionné en  $I + 1$  sous ensembles indépendants. Pour chaque sous-ensemble,  $i \in \llbracket 0, I \rrbracket$ , nous disposons de plusieurs observations i.i.d., notées  $\{\mathbf{z}_k^i\}_{k \in \llbracket 1, K \rrbracket}$  et chacune de taille  $M$ . De manière très générale, ces données sont modélisées par :

$$\mathbf{z}_k^i = \mathbf{s}_k^i + \mathbf{n}_k^i \quad (1)$$

• Le signal d'intérêt  $\mathbf{s}_k^i \sim \mathcal{CN}(0, \Sigma_R^i)$ , sa MC est de rang  $R \ll M$  et notée  $\Sigma_R^i = \mathbf{V}_i \mathbf{R}_i \mathbf{V}_i^H$  où  $\mathbf{V}_i \in \mathcal{U}_R^M$  représente une base orthonormale engendrée par le sous-espace signal et  $\mathbf{R}_i \in \mathbb{C}^{R \times R}$  est la MC correspondante dans cet espace.

- $\mathbf{n}_k^i \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$  désigne un bruit blanc additif gaussien.
  - $\mathbf{s}_k^i$  et  $\mathbf{n}_k^i$  sont deux vecteurs aléatoires indépendants.
- En conséquence, la distribution des observations est :

$$\mathbf{z}_k^i \sim \mathcal{CN}(0, \boldsymbol{\Sigma}_i) \text{ avec } \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{R}^i \mathbf{V}_i^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2)$$

On notera  $\mathcal{L}(\{\mathbf{z}_k^i\}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=0}^I \frac{\exp\{\text{tr}\{-\mathbf{S}_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{\theta})\}\}}{|\boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\theta})|^K}$ , la vraisemblance des données  $\{\mathbf{z}_k^i\}$ , où  $\mathbf{S}_i$  est la matrice de covariance empirique et  $\boldsymbol{\theta}$  le paramètre d'intérêt définissant  $\{\boldsymbol{\Sigma}_i\}$ .

Dans cet article, nous souhaitons tester si l'ensemble sous test, donné par  $i = 0$ , partage certaines propriétés communes avec les ensembles secondaires. Plus particulièrement, nous proposons un nouveau détecteur basé sur le test d'égalité de sous-espace signal.

### 3 État de l'art

Dans ce qui suit, nous présentons deux TRVG dérivés à partir des tests de similarité des MC. Le premier permet de tester l'égalité des MC, tandis que le second propose un détecteur basé sur un test statistique de proportionnalité des MC.

#### 3.1 Test d'égalité

Le problème général du test d'égalité des MC [6] dans le cas gaussien (2) est analysé, par exemple, dans [2]. Il peut se formaliser à l'aide d'un test d'hypothèse binaires :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\Sigma}_0 = \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_i = \boldsymbol{\Sigma} \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \\ \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\Sigma}_0 \neq \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_i = \boldsymbol{\Sigma} \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \end{cases} \quad (3)$$

Le TRVG correspondant à ce test est donné dans [2]. On notera que dans le contexte des MC à structure rang faible (2), le test correspondant a été proposé dans [1].

#### 3.2 Test de proportionnalité

En considérant des observations gaussiennes (2), le test de proportionnalité des MC [3] est étudié dans [10]. Ce problème est exprimé sous la forme d'un test d'hypothèse :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\Sigma}_0 = \beta_0 \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_i = \beta_i \boldsymbol{\Sigma} \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \\ \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\Sigma}_0 \neq \beta_0 \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_i = \beta_i \boldsymbol{\Sigma} \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \end{cases} \quad (4)$$

Le TRVG correspondant à (4) est étudié dans [10]. Un test de proportionnalité sur la partie rang faible des MC structurées comme en (2) a été proposé dans [1].

## 4 Le détecteur proposé

### 4.1 Test d'égalité de sous-espace principal

Les détecteurs susmentionnés sont basés sur un test d'égalité ou de proportionnalité de MC. Ici, nous nous concentrons sur la propriété d'égalité de sous-espace principal. Nous visons à construire un test uniquement sensible au changement du sous-espace signal des MC structurées comme en (2). Formellement, nous allons tester l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}_i\} = \mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}\}, \forall i \in \llbracket 0, I \rrbracket \\ \mathcal{H}_1 : \begin{cases} \mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}_i\} = \mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}\}, \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \\ \mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}_0\} \neq \mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}\} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

avec  $\mathcal{R}_R\{\cdot\}$  l'opérateur défini par :

$$\mathcal{R}_R : \begin{cases} \mathcal{H}_M^+ & \longrightarrow \mathcal{G}_R \\ \boldsymbol{\Sigma} \stackrel{\text{DVS}}{=} [\mathbf{V}_R | \mathbf{V}_R^\perp] \mathbf{D} [\mathbf{V}_R | \mathbf{V}_R^\perp]^H & \longmapsto \mathbf{V}_R \mathbf{V}_R^H \end{cases} \quad (6)$$

**Remarque :** Ce test permet d'étudier un mécanisme physique spécifique. Par exemple, les puissances et les corrélations des sources peuvent fluctuer tout en engendrant le même sous-espace signal. Cela conduit à la fois aux relations :

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 \neq \boldsymbol{\Sigma}_i \text{ et } \boldsymbol{\Sigma}_0 \not\propto \boldsymbol{\Sigma}_i, \forall i \quad (7)$$

et

$$\mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}_0\} = \mathcal{R}_R\{\boldsymbol{\Sigma}_i\}, \forall i \quad (8)$$

Notons que (7) est considérée comme  $\mathcal{H}_1$  pour les tests standards (3) et (4) tandis que la relation (8) donne  $\mathcal{H}_0$  pour le test (5). Ainsi, le détecteur proposé sera insensible aux variations de corrélations inter-sources et aux fluctuations de leurs puissances. Cette propriété peut s'avérer utile pour diminuer le taux de fausses alarmes dans des applications spécifiques [10].

### 4.2 Dérivation du test

En reprenant (5) avec la structure en (2), le test d'hypothèse peut être reformulé en :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} \mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0})^H + \sigma^2 \mathbf{I}, \forall i \in \llbracket 0, I \rrbracket \\ \mathcal{H}_1 : \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^* \mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^i (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^*)^H + \sigma^2 \mathbf{I}, \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \\ \boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0 \mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^0 (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0)^H + \sigma^2 \mathbf{I} \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

où  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0})^H$ ,  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^* (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^*)^H$  et  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0 (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0)^H$  représentent les sous-espaces engendrés respectivement par les données secondaires sous  $\mathcal{H}_0$ , sous  $\mathcal{H}_1$  et par l'ensemble sous-test sous  $\mathcal{H}_1$ . Les quantités  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i$ ,  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^i$  et  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^0$  désignent les MC dans les sous-espaces engendrés respectivement par les données secondaires sous  $\mathcal{H}_0$ , sous  $\mathcal{H}_1$  et par l'ensemble sous-test sous  $\mathcal{H}_1$ . Le TRVG pour le test considéré est donné par :

$$\frac{\max_{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}} \mathcal{L}(\{\mathbf{z}_k^i\}|\mathcal{H}_1, \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}})}{\max_{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}} \mathcal{L}(\{\mathbf{z}_k^i\}|\mathcal{H}_0, \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}})} \underset{\delta_{\text{glr}}^{\text{sub}}}{\geq} \quad (10)$$

où on notera  $\mathcal{L}(\{\mathbf{z}_k^i\}|\mathcal{H}_1, \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}})$  et  $\mathcal{L}(\{\mathbf{z}_k^i\}|\mathcal{H}_0, \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}})$  les vraisemblances des données  $\{\mathbf{z}_k^i\}$  sous respectivement  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_0$ . Les paramètres  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}$  et  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}$  désignent  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}} = \left\{ \left\{ \mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i \right\}_{i \in \llbracket 0, I \rrbracket}, \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} \right\}$  et  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}} = \left\{ \left\{ \mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^i \right\}_{i \in \llbracket 0, I \rrbracket}, \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^*, \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0 \right\}$ . Afin d'évaluer ce TRVG, nous utilisons l'algorithme MM par blocs [8]. Cet algorithme effectue une mise à jour des paramètres en minimisant la fonction de substitution (majoration) de l'objective. L'intérêt de l'approche MM permet d'obtenir des mises à jour sous forme analytique. Il n'y a généralement pas de garantie sur la convergence vers le minimum global. Néanmoins, la convergence de la fonction objectif est prouvée dans certaines conditions [5]. Nous proposons ci-dessous de développer les estimateurs de maximum de vraisemblance (EMV) des paramètres  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}$  et  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}$ .

### 4.3 EMV de $\theta_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}$ sous $\mathcal{H}_0$

Sous  $\mathcal{H}_0$ , le problème d'optimisation est donné par :

$$\begin{aligned} \max_{\theta_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}} \quad & \mathcal{L}(\{\mathbf{z}_k^i\} | \mathcal{H}_0, \theta_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}) \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i \succcurlyeq \mathbf{0}, \forall i \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ et } \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^H \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (11)$$

Ce problème est équivalent à minimiser la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \min_{\theta_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}} \quad & \sum_{i=0}^I \left[ K \ln(|\Sigma_i|) + \text{Tr} \left\{ \mathbf{S}_i \Sigma_i^{-1} \right\} \right] \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i \succcurlyeq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^H \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (12)$$

Pour résoudre ce problème, nous dérivons un algorithme itératif qui permet d'avoir des mises à jour des variables  $\{\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i\}$  et  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}$ . Cet algorithme est décrit dans Algorithme 1.

#### 4.3.1 Mise à jour de $\{\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i\}$

En fixant  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}$ , l'objectif de (12) en fonction de  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i$  est exprimée sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i) = K \ln \left| (\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i + \sigma^2 \mathbf{I}) \right| \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathbf{S}}_i (\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \right\} \quad (13)$$

avec  $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^H \mathbf{S}_i \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}$ . Le minimum de (13) par rapport à  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i$  est donné par :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^{i(t+1)} = \mathbf{Q}_R \tilde{\mathbf{D}}_R \mathbf{Q}_R^H \quad (14)$$

où  $[\tilde{\mathbf{D}}_R]_{r,r} = \max([\mathbf{D}_R]_{r,r} - \sigma^2, 0), \forall r \in \llbracket 1, R \rrbracket$  et  $\tilde{\mathbf{S}}_i / K \stackrel{\text{DVS}}{=} \mathbf{Q}_R \mathbf{D}_R \mathbf{Q}_R^H$ .

#### 4.3.2 Mise à jour de $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}$

En fixant  $\{\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^i\}$ , le problème d'optimisation (12) par rapport à  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}$  est formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}} \quad & \sum_{i=0}^I \text{Tr} \{ (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0})^H \mathbf{S}_i \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} \mathbf{W}_i \} \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^H = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (15)$$

En utilisant l'algorithme MM, la fonction objectif peut être majorée au point  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^{(t)}$  par la fonction de substitution  $g(\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0} | \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^{(t)}) = \sum_{i=1}^I 2 \text{Re} [\text{Tr} \{ (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0})^H \mathbf{S}_i (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^{(t)}) \mathbf{W}_i \}]$  [9]. Ce problème possède une solution explicite, définissant l'itération :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^{(t+1)} = \mathbf{U}_{\text{left}} \mathbf{U}_{\text{right}}^H, \quad (16)$$

où  $\mathbf{U}_{\text{left}}$  et  $\mathbf{U}_{\text{right}}^H$  sont déterminées à partir de la *thin singular value decomposition* (TSVD) de la matrice  $\sum_{i=0}^I (\mathbf{S}_i \mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^{(t)} \mathbf{W}_i) \stackrel{\text{TSVD}}{=} \mathbf{U}_{\text{left}} \mathbf{D} \mathbf{U}_{\text{right}}^H$ .

### 4.4 EMV de $\theta_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}$ sous $\mathcal{H}_1$

Sous  $\mathcal{H}_1$ , le problème d'optimisation de vraisemblance par rapport à  $\theta_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \max_{\theta_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}} \quad & \mathcal{L}(\{\mathbf{z}_k^i\} | \mathcal{H}_1, \theta_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}) \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^i \succcurlyeq \mathbf{0}, (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0)^H \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0 = \mathbf{I} \text{ et } (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^*)^H \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^* = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (17)$$

Nous dérivons un algorithme itératif qui nous permet d'avoir des mises à jour des variables  $\{\mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^i\}_{i \in \llbracket 0, I \rrbracket}$ ,  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^*$  et  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0$ , décrit dans Algorithme 2.

---

#### Algorithme 1 L'EMV de $\theta_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}}$ , sous $\mathcal{H}_0$ basé sur MM par blocs

---

- 1: **Entrées** :  $\{\mathbf{S}_i\}$  pour  $i \in \llbracket 0, I \rrbracket$ ,  $K$ ,  $R$  et  $\sigma^2$ .
  - 2: **répéter**
  - 3:      $t \leftarrow t + 1$
  - 4:     Mise à jour  $\mathbf{R}_{\mathcal{H}_0}^{i(t)}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, I \rrbracket$  avec (14)
  - 5:     Mise à jour  $\mathbf{V}_{\mathcal{H}_0}^{(t)}$  avec (16)
  - 6:     **jusqu'à** convergence.
  - 7: **Sortie** :  $\hat{\theta}_{\mathcal{H}_0}^{\text{sub}} = \left\{ \left\{ \hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{H}_0}^i \right\}_{i \in \llbracket 0, I \rrbracket}, \hat{\mathbf{V}}_{\mathcal{H}_0} \right\}$
- 

---

#### Algorithme 2 L'EMV de $\theta_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}}$ , sous $\mathcal{H}_1$ basé sur MM par blocs

---

- 1: **Entrée** :  $\{\mathbf{S}_i\}$  pour  $i \in \llbracket 0, I \rrbracket$ ,  $K$ ,  $R$  et  $\sigma^2$ .
  - 2: Rappel Algorithme 1 sur  $\{\mathbf{S}_i\}$ , la sortie est  $\{\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{H}_1}^i\}$  et  $\hat{\mathbf{V}}_{\mathcal{H}_1}^*$
  - 3: Mise à jour  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{H}_1}^0$  et  $\hat{\mathbf{V}}_{\mathcal{H}_1}^0$  avec (19)
  - 4: **Sortie** :  $\hat{\theta}_{\mathcal{H}_1}^{\text{sub}} = \left\{ \left\{ \hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{H}_1}^i \right\}_{i \in \llbracket 0, I \rrbracket}, \hat{\mathbf{V}}_{\mathcal{H}_1}^*, \hat{\mathbf{V}}_{\mathcal{H}_1}^0 \right\}$
- 

#### 4.4.1 Mise à jour de $\{\{\mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^i\}_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket}, \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^*\}$ sous $\mathcal{H}_1$

Le problème considéré est identique à celui dans (12) en excluant l'ensemble sous-test. Ainsi, nous pouvons directement appliquer Algorithme 1.

#### 4.4.2 Mise à jour de $\{\mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^0, \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0\}$ sous $\mathcal{H}_1$

Le problème d'optimisation est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^0, \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0} \quad & K \ln(|\Sigma_i|) + \text{Tr} \left\{ \mathbf{S}_i \Sigma_i^{-1} \right\} \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{R}_{\mathcal{H}_1}^0 \succcurlyeq \mathbf{0} \text{ et } (\mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0)^H \mathbf{V}_{\mathcal{H}_1}^0 = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (18)$$

La solution de ce problème est :

$$\left[ \hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{H}_1}^0 \right]_{r,r} = \max([\mathbf{D}_R]_{r,r} - \sigma^2, 0), \forall r \in \llbracket 1, R \rrbracket \text{ et } \hat{\mathbf{V}}_{\mathcal{H}_1}^0 = \mathbf{U}_R \quad (19)$$

où  $\mathbf{S}_0 / K \stackrel{\text{DVS}}{=} \mathbf{U}_R \mathbf{D}_R \mathbf{U}_R^H$ .

## 5 Simulations numériques

L'objectif de cette section est d'illustrer les performances du détecteur proposé noté  $t_{\text{sub}}$  par rapport aux détecteurs suivants : i)  $t_E$  correspond au TRVG pour le test d'égalité [2]. ii)  $t_E^{\text{LR}}$  désigne le TRVG pour le test d'égalité dans le contexte de la MC à structure rang faible [1]. iii)  $t_P$  indique le TRVG pour le test de proportionnalité [10]. iv)  $t_P^{\text{LR}}$  est le TRVG permettant de tester la proportionnalité de la MC du signal rang faible [1]. Nous considérons la paramétrisation suivante  $M = 20$ ,  $R = 5$ ,  $K = 25$ ,  $I = 3$ ,  $\mathbf{z}_k^i \sim \mathcal{CN}(0, \Sigma_i)$  et  $\Sigma_i = \tau_i \mathbf{V}_i \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}_i^H + \sigma^2 \mathbf{I}$  où  $\mathbf{V}_i \in \mathcal{U}_R^M$ ,  $\tau_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale, les valeurs propres  $[\mathbf{\Lambda}]_{r,r} = \alpha(R + 1 - r)$  et le rapport signal à bruit  $\text{RSB} = \text{Tr}\{\mathbf{\Lambda}\} / R\sigma^2$  avec  $\sigma^2 = 1$ . Comme critère de performance, nous considérons la courbe COR qui représente la probabilité de détection (PD) par rapport à la probabilité de fausse alarme (PFA) pour les scénarios suivants :

- **Scénario 1** : Sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ ,  $\tau_i = 1$  et  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket$  où  $\mathbf{V} \in \mathcal{U}_R^M$  est construite à partir de la base canonique.

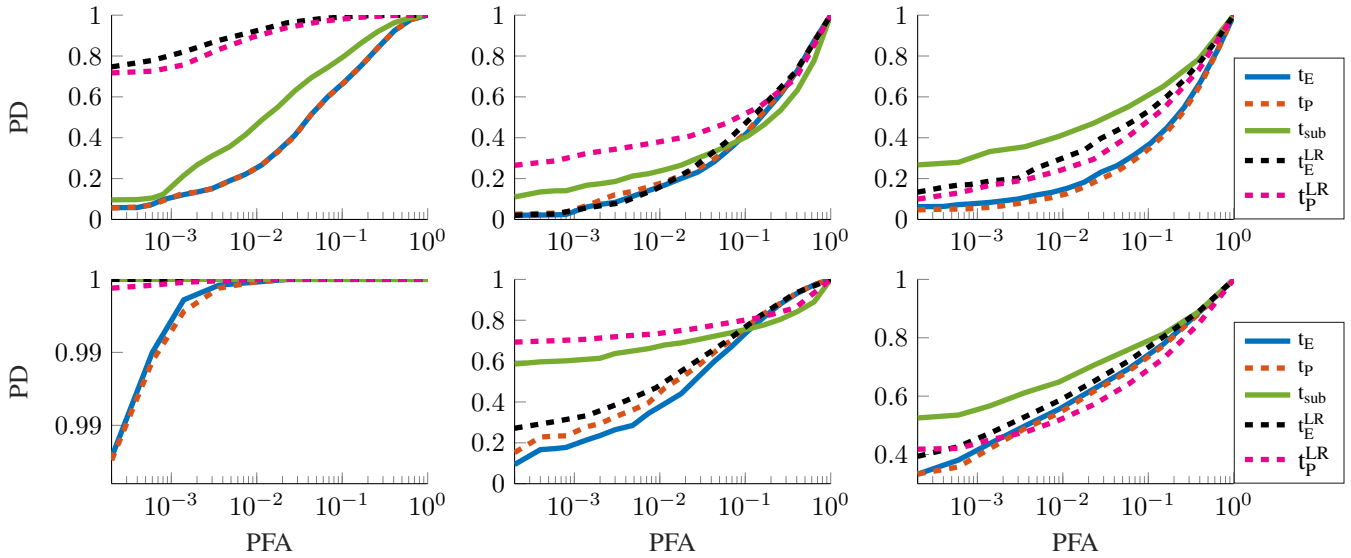


FIGURE 1 – COR pour les Scénario 1 à 3 (de gauche à droite) où RSB = 0dB (haut) et RSB = 5dB (bas).

La MC de l'ensemble sous-test, sous  $\mathcal{H}_1$ , est donnée par :  $\Sigma_0 = \mathbf{V}_0 \mathbf{A} \mathbf{V}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}$  où  $\mathbf{V}_0 \in \mathcal{U}_R^M$  tel que  $\mathbf{V}_0 \neq \mathbf{V}$ , c'est à dire  $\mathcal{R}_R\{\Sigma_0\} \neq \mathcal{R}_R\{\Sigma_i\}$ ,  $\forall i$ . Ce scénario correspond à un changement strict de la MC où toutes les données secondaires sont homogènes.

- Scénario 2 : Sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ ,  $\tau_i \sim \Gamma(\nu, 1/\nu)$ , ( $\nu = 1$ ),  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket$  où  $\mathbf{V}$  est définie comme Scénario 1. Sous  $\mathcal{H}_1$ , l'anomalie dans  $\Sigma_0$  est générée en changeant le sous-espace signal, c'est à dire  $\mathcal{R}_R\{\Sigma_0\} \neq \mathcal{R}_R\{\Sigma_i\}$ ,  $\forall i$ . Ce scénario prend en compte les fluctuations de puissance du signal par rapport aux ensembles  $i$ .

- Scénario 3 : Sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ ,  $\tau_i \sim \Gamma(\nu, 1/\nu)$ , ( $\nu = 1$ ) et  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V} \mathbf{Q}_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket$  où  $\mathbf{V}$  est générée comme les autres scénarios et  $\{\mathbf{Q}_i\}$  est un ensemble de matrices de rotation de dimension  $R \times R$ . Sous  $\mathcal{H}_1$ , l'anomalie dans  $\Sigma_0$  est engendrée par un changement de son sous-espace principal où  $\mathcal{R}_R\{\Sigma_0\} \neq \mathcal{R}_R\{\Sigma_i\}$ ,  $\forall i$ . Le Scénario 3 vise à tester le phénomène décrit dans Section 4.1.

La figure 1 présente les COR des différents détecteurs dans différents scénarios et RSB :

- La première colonne (à gauche) montre les courbes COR des détecteurs dans le Scénario 1 pour respectivement RSB=0dB (haut) et RSB=5dB (bas). Le détecteur proposé  $t_{\text{sub}}$  montre de meilleures performances que  $t_P$  et  $t_E$  puisqu'il introduit de l'information sur la structure de MC. Cependant, les détecteurs  $t_P^{\text{LR}}$  et  $t_E^{\text{LR}}$  présentent des performances intéressantes par rapport à tous les autres. Ce résultat était prévisible, car ces deux détecteurs sont spécifiquement adaptés à ce scénario ( $t_E^{\text{LR}}$  correspond au TRVG pour ce cas).

- La deuxième colonne (centrale) présente les courbes COR des détecteurs dans le Scénario 2 pour respectivement RSB=0dB (haut) et RSB=5dB (bas). Le détecteur  $t_P^{\text{LR}}$  correspond au TRVG le plus approprié, il est donc plus performant que les autres. Il est à noter que nous nous intéressons principa-

lement à la performance des détecteurs à faible PFA (inférieure à 0,1). Dans cette plage,  $t_{\text{sub}}$  offre également des performances intéressantes car il est aussi conçu pour être insensible aux fluctuations de puissance du signal sous  $\mathcal{H}_0$ .

- La troisième colonne (à droite) montre les courbes COR des détecteurs dans Scénario 3 pour respectivement RSB=0dB (haut) et RSB=5dB (bas). Pour le scénario considéré, sous  $\mathcal{H}_0$ , la relation (7) est vraie bien que (6) soit aussi satisfaite. Le test  $t_{\text{sub}}$  étant conçu pour être insensible à ce type d'hétérogénéité, il permet donc de réduire la PFA et d'atteindre les meilleures performances.

## Références

- [1] R. Ben Abdallah, A. Mian, A. Breloy, A. Taylor, M. N. El Korso, and D. Laurop. Detection methods based on structured covariance matrices for multivariate SAR images processing. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2019.
- [2] D. Ciunzio, V. Carotenuto, and A. De Maio. On multiple covariance equality testing with application to SAR change detection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(19):5078–5091, 2017.
- [3] F. T. Walterand et al. Testing proportionality of covariance matrices. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):102–106, 1951.
- [4] G. Ginolhac, P. Forster, F. Pascal, and J. P. Ovarlez. Performance of two low-rank STAP filters in a heterogeneous noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 61(1):57–61, 2013.
- [5] D. R. Hunter and K. Lange. A tutorial on MM algorithms. *The American Statistician*, 58(1):30–37, 2004.
- [6] P. C. O'Brien. Robust procedures for testing equality of covariance matrices. *Biometrics*, pages 819–827, 1992.
- [7] M. S. Srivastava and H. Yanagihara. Testing the equality of several covariance matrices with fewer observations than the dimension. *Journal of Multivariate Analysis*, 101(6):1319–1329, 2010.
- [8] Y. Sun, P. Babu, and D. P. Palomar. Majorization-minimization algorithms in signal processing, communications, and machine learning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(3):794–816, Feb 2017.
- [9] Y. Sun, A. Breloy, P. Babu, D. P. Palomar, F. Pascal, and G. Ginolhac. Low-complexity algorithms for low rank clutter parameters estimation in RADAR systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(8):1986–1998, April 2016.
- [10] A. Taylor, H. Oriot, P. Forster, and F. Daout. Reducing false alarm rate by testing proportionality of covariance matrices. International RADAR conference, 2017.